

doi:10.3969/j.issn.1007-7162.2012.03.009

压缩感知原理在盲信号分离中的应用

王涛文

(广东工业大学 应用数学学院,广东 广州 510520)

摘要: 主要阐述了压缩感知的基本原理,介绍了压缩感知的 3 个基本问题:信号的稀疏表示、稀疏基与测量矩阵的不相关性和信号的重构,分析了它与盲信号分离之间的联系,为解决盲信号分离问题提供了一个新的途径.最后通过具体实验说明它在盲信号分离上的应用.

关键词: 压缩感知;稀疏;不相关;信号分离

中图分类号: TN912.3

文献标志码: A

文章编号: 1007-7162(2012)03-0049-05

The Application of Compressed Sensing in Blind Source Separation

Wang Tao-wen

(School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: Compressed Sensing has been a new signal sampling theory in recent years, for it overcomes the high rate of sampling defects of traditional Nyquist signal sampling theory, It presented the basic principles of Compressed Sensing, introduced three fundamental questions of Compressed Sensing-the sparseness of signals、irrelevance between sparse matrix and measurement matrix, and reconstruction of the signals, and analyzed the contact between Compressed Sensing and Blind Source Separation. Then, it offered a new way to solve the problem of Blind Source Separation. Finally, through the experiment it showed its application in Blind Source Separation.

Key words: compressed sensing; sparse; irrelevance; signal separation

多年来,信号的采样一直遵循著名的 Nyquist 信号采样定理,但 Nyquist 采样定理要求采样速率大于信号带宽的两倍以上时,才能由采样信号精确重构出原始信号.随着科学技术的发展,信号的带宽越来越大,人们对信号的采样速率、传输速度和储存空间的要求也越来越高,传统的采样定理已不能适应发展的要求.一个很自然的问题就是:是否存在这样一种采样,既能在采样时保存信号的信息,又能只需远小于 Nyquist 采样定理所要求的采样带宽就可以精确或近似精确地重构原始信号.压缩感知理论^[1]从正面回答了这一问题,并取得了显著的成果^[2-3].作为一种新兴的信号采样理论,它克服了传统的奈奎斯特采样定理采样速率高的缺陷,能精确和高效地重构出原始信号.

压缩感知理论自 2006 年由 Donoho 与 Candes 等人正式提出,就受到信息论、信号处理、图象处理、光学、雷达成像、模式识别、医疗成像、地质勘探、无线通信等领域的许多学者的高度关注.其基本理论是:若信号是可压缩的或在某个变换域是稀疏的.则可用一个与变换基不相关的观测矩阵将变换得到的高维信号投影到一个低维空间上,再通过求解一个优化问题就可以从这些少量的投影中以高概率重构出原信号,并且证明了这样的投影包含了原始信号的足够信息.压缩感知是一种全新的信息获取和处理理论,该理论在信号采样的同时,就对数据进行适当的压缩处理,使得对高分辨率的信号采集成为可能.这极大地降低了信号的采样频率、信号处理的时间和计算成本以及数据存储和传输的代价.目前,压

缩感知理论在信号的稀疏变换、观测矩阵的设计和信号的重构等方面都取得了一定的进展. 本文拟探讨压缩感知在盲信号分离中的应用.

1 压缩感知原理简介

压缩感知理论是一种新的在信号采样的同时实现压缩的理论框架,其压缩采样过程如图 1 所示.

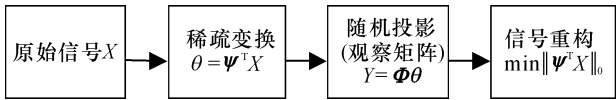


图 1 压缩感知理论框架

Fig. 1 The framework of Compressed Sensing

设一长度为 N 的信号 $X \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ 在某个正交基或紧框架 Ψ 上是稀疏的或可压缩的 (即只有少数的非零系数),如果将系数 θ 投影到另一个与变换基 Ψ 不相关的观测基 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}, M \leq N$ 上,得到观察集合 $Y \in \mathbf{R}^{M \times 1}, Y = \Phi \theta = \Phi \Psi^T X = W^{CS} X, W^{CS}$ 称为投影矩阵,则通过求解优化问题 (1) 来求解 X 的精确或近似重构信号 $\bar{X}$.

min ||Psi^T X||_0. s. t. Phi Psi^T X = Y. (1)

求得的信号 $\bar{X}$ 在正交基 Ψ 上的表示最稀疏,最后通过稀疏变换的逆变换估计出原始信号.

压缩感知理论框架主要包括以下 3 方面内容.

- 1) 信号的稀疏分解:对于信号 $X \in \mathbf{R}^{N \times 1}$,找出一个合适的规范正交基 Ψ ,使得该信号在 Ψ 上能够稀疏表示.
- 2) 观测矩阵的设计:设计观测矩阵 Φ ,使其与变换基 Ψ 不相关.
- 3) 信号的重构:设计一个快速高效的 reconstruc-tion 算法,用以精确恢复原始信号.

1.1 信号的稀疏表示

由于压缩感知理论的前提条件是信号在某个规范正交基上必须是稀疏的或者是可以缩的,而在实际生活中的信号往往不是稀疏的,因此首先要对信号进行稀疏表示.

信号的稀疏性是指信号在绝大多数采样值为零或接近零,只有少数几个采样值明显远大于零. 信号是可压缩的,是指信号在允许较小损失的情况下可以通过少量的大系数表达出来.

通常我们采取正交变换的方法,使原始信号在变换域中是稀疏的或者是可压缩的.

theta = Psi^T X = sum_{i=1}^k Psi_i X_i, 1 <= k <= M <= N.

信号在稀疏基上有 k 个非零元素属于不严格稀疏的情况,实际应用过程中,往往采用近似稀疏表示. 比如,对信号进行稀疏变换之后,可以通过保留其稀疏系数中的 k 个较大分量,将其余 $n - k$ 个较小分量置零的方式,近似稀疏化. 选择合适的稀疏基,可以使原始信号尽可能地稀疏,即 k 尽可能地小. Candès 和 Tao^[4]通过研究发现,满足幂定律衰减的信号,可利用压缩感知理论进行恢复,并且重构误差满足

E = ||X_CS - X||_2 <= C_r * (k / (log N)^6)^{-r},

其中 $r = 1/p - 1/2, 0 < p < 1$.

变换系数的衰减程度是压缩感知理论中衡量一个变换基稀疏表示能力的重要标准. 常用的稀疏变换有:Fourier 变换、K-L 变换、小波变换、超小波变换等,这些都是根据信号的结构特性来进行信号的稀疏化.

1.2 稀疏基与测量矩阵的不相关性

Candès、Romberg 等人已经证明一个降维的投影集合包含了重构稀疏信号的足够信息. 这就是压缩感知 (Compressed Sensing) 理论的核心内容. 在压缩感知中,假定信号在某个正交变换域的系数是 k 阶稀疏的. 我们不对 k 阶系数直接编码,而是将信号的系数向量投影到另一个基函数集合 $\{\phi_m, m = 1, 2, \dots, M\}$ 上,然后得到原始信号 X 的 M 个线性测量 Y ,即: $Y = \Phi \Psi^T X$. 压缩感知理论表明:随机投影矩阵一定要服从一定类型的不确定性原则 (Uniform Uncertainty Principle, UUP),其核心内容是投影矩阵 W^{CS} 满足有限等距准则^[5] (Restricted Isometry Property, RIP),使得随机投影能保持必要的原始信号的信息不受损失.

对于任意长度为 N 的 k 阶稀疏信号 X ,如果存在常数 $\varepsilon_k \in (0, 1)$,使得

(1 - epsilon_k) * ||X||_2 <= ||W^CS X||_2 <= (1 + epsilon_k) * ||X||_2 成立,则称投影矩阵 W^CS 满足有限等距准则.

然而,判断随机投影矩阵是否符合有限等距准则往往是很困难的,我们通常采取它的等价条件,即变换基和观测基的相关性^[6]来度量.

定义观测基 Φ 和变换基 Ψ 的相关性为 $\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \times \max_{1 \leq i \leq j \leq N} |(\Phi_i, \Psi_j)|$.

相关性测度了 Φ, Ψ 的任意两项之间的最大相关性. 如果 Φ, Ψ 包含相关的项,相关性就大,否则就很小.

研究者通过大量实验分析研究,得到了满足不相关性的观测基 Φ 和变换基 Ψ 的 3 组选择: 1) Ψ 是傅立叶变换中的正弦波, Φ 是尖峰基. 2) Ψ 是小波基, Φ 是噪声矩阵. 3) Ψ 是任意一个固定稀疏基, Φ 是随机矩阵. 由于实际应用过程中稀疏基 Ψ 会随着信号的不同而发生变化,但随机矩阵和任何一个固定稀疏基 Ψ 在很大程度上都是非相关的,因此我们一般选取测量矩阵时都是选择随机的测量矩阵. 常用的满足 RIP 准则的随机测量矩阵有: 高斯随机矩阵、二值随机矩阵(伯努利矩阵)、哈达码矩阵、局部傅里叶矩阵等.

1.3 信号的重构

压缩感知理论的核心问题是从观测得到的有限的 M ($M \leq N$) 个观测样本中重构出 N 维原始信号,即未知量个数比观测量要多得多. 由于观测数量 M 远小于信号长度 N , 因此不得不面对求解欠定方程组 $Y = W^{CS}X$ 的问题. 当随机投影矩阵 W^{CS} 满足有限等距准则时,通过测量矩阵求出 k 稀疏系数 θ ,再通过稀疏变换 Ψ 的逆变换恢复出原始信号 X . 信号稀疏重构问题的最直接方法就是在 l_0 范数下求解

$$\min \|\Psi^T X\|_0, \quad \text{s. t. } \Phi \Psi^T X = Y.$$

由于求解最小 l_0 范数是一个 NP 难问题, l_1 范数最小问题和 l_0 范数最小问题在一定条件下具有等价性,因此,通常将求解最小 l_0 范数转化为求解最小 l_1 范数:

$$\min \|\Psi^T X\|_1, \quad \text{s. t. } \Phi \Psi^T X = Y.$$

到目前为止重构算法大致可以分为以下三大类^[7].

1) 贪婪追踪算法: 这类方法是每次迭代时选择一个局部最优解来逐步逼近原始信号. 主要的算法有 MP 算法^[8]、OMP 算法^[9]、分段 OMP 算法(STOMP)和正则化 OMP(ROMP)算法等.

2) 凸松弛法: 此类方法通过将非凸问题转化为凸问题求解,进而得到信号的逼近,如内点法、梯度投影方法、BP 算法和迭代阈值法.

3) 组合算法: 这类方法要求信号的采样支持通过分组测试快速重建,如链式追踪、傅立叶采样和 HHS 追踪等.

1.4 存在问题的分析

虽然压缩感知的应用广泛,涉及到数据的压缩与获取、信号处理、图象处理、信道编码、生物传感、雷达成像通信等诸多领域. 同时也取得了一些研究成果: Rice 大学报道了一种单像素照相机. 这种相机

利用由单元可以随机转动的数字微反射镜器件实现了测量矩阵 Φ , 最终可以以单像素实现高分辨率的光学成像; 耶鲁大学研制了超谱成像仪; 麻省理工学院研制了 MRI RF 脉冲设备; 伊利诺伊州立大学研制了 DNA 微阵列传感器; 在地震勘探成像和核磁共振成像^[10]中,使用压缩感知理论方法对目标信号进行少量的随机观测次数就能获得高精度重构. 但同时也存在大量的问题需要研究,概括如下.

1) 如何寻找合适的稀疏基变换,使原始信号具有稀疏性或者是可压缩的,这是压缩感知理论的难点所在.

2) 对于稳定的重构算法,如何设计最优的测量矩阵 Φ .

3) 如何设计一个计算复杂度小、测量数据少、快速的重构算法来精确恢复原始信号.

4) 根据压缩感知的理论知识,如何设计有效的软硬件来处理实际的问题.

5) 对含有噪声的信号或采样过程中引入噪声的信号重构也是难点之一.

2 压缩感知原理在欠定信号分离方面的应用

2.1 盲信号分离介绍

盲信号分离是 20 世纪末迅速发展起来的一个新兴的研究领域,它在语音信号处理、图象处理、雷达与通信系统、信息检索、数据挖掘和生物医学等诸多领域获得广泛应用,受到国内外科研工作者的注意. 盲信号分离是指: 在不知道源信号和传输信道的参数情况下,根据源信号的统计特性,从传感器获取的混合信号中分离出源信号的过程.

混叠盲源分离问题的数学模型可以表示为

$$X(t) = A \times S(t) + n(t), \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (2)$$

其中 $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 是未知的行满秩混叠矩阵, $S(t) = [s_1(t) \cdots s_n(t)]^T$ 是未知的 n 维盲源信号, $X(t) = [x_1(t) \cdots x_m(t)]^T$ 是 m 维的观测信号, $n(t) = [n_1(t) \cdots n_m(t)]^T$ 是 m 维噪声信号, T 为观察样本的个数. 当 $m \geq n$ 时,观测信号的个数多于源信号,这种情况称为过定(overdetermined)盲源分离; 当 $m < n$ 时,观测信号的个数少于源信号,这种情况称为欠定(underdetermined)盲源分离.

当源信号满足稀疏性或可压缩时,在不考虑噪声的情况下式(2)可转变为

$$x(t) = \sum_{j=1}^k a_j s_j(t), \quad t = 1, 2, \dots, T; \quad j \in \{1,$$

$2, \dots, n\}$. (3)

其中 $k(1 \leq k \leq m)$ 表示活跃的源信号个数.

2.2 压缩感知与盲信号分离

分析欠定盲源分离的模型: $X = AS = a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_k s_k$ 和压缩感知理论的信号重构模型 $Y = \Phi\theta$, 对比可以看到, 它们都是求解一个欠定方程组的问题, 都是利用信号的稀疏性质, 通过重构算法来恢复信号. 如果把盲源分离模型中混合矩阵 A 对应压缩感知模型中的测量矩阵 Φ , 就自然而然把盲源分离模型和压缩感知模型有机统一起来了.

假设盲源信号具有稀疏性或是可压缩的, 传统的盲源分离方法, 一般采取两步来恢复盲源信号, 即: 求解过程分两步来实现, 首先采用聚类的方法来估计混叠矩阵, 然后在已知混叠矩阵的情况下, 利用线性规划来估计盲源信号. 压缩感知的思想是把原始信号稀疏变换后, 通过一个已知的测量矩阵来进行感知, 再利用重构算法来对稀疏信号进行估计, 最后通过稀疏变换的逆变换来恢复原始信号. 因此可以用压缩感知的理论来对盲源信号进行恢复.

可以看到, 利用压缩感知理论的思想有明显的优点, 它避免了聚类方法估计混叠矩阵的不准确性和复杂性的问题. 聚类方法是一种不易操作、计算复杂、非常耗时的一种算法. 由于随机矩阵和任何一个固定稀疏基 Ψ 在很大程度上都是非相关的, 所以可以随机选择测量矩阵. 此外压缩传感理论只需通过少量的采样数据, 就可以精确地重构出原始信号, 从而节省了大量的采样代价和存储资源.

2.3 实验仿真

设源信号 X 的个数为 $n=6$, 傅立叶正交变换 Ψ 后, 假设信号的稀疏系数 $k=2$, 再通过 3×6 的随机测量矩阵 Φ 后, 得到测量值 Y , 此外测量的次数 $T=8\ 000$. 选择匹配追踪法对信号重构. 具体算法如下.

1) 对源信号进行傅立叶正交变换, 得到信号的稀疏表示.

2) 产生随机测量矩阵, 并对得到的稀疏信号进行测量, 得到测量值.

3) 利用匹配追踪法重构出源信号的稀疏系数.

4) 进行傅立叶正交变换的逆变换, 得到某个时刻的源信号. 经过 T 次采样后, 得到整个源信号.

图2为6个稀疏信号的源信号、3个测量的混合信号和6个恢复信号的仿真图象. 从仿真效果来看, 运用压缩感知原理来进行盲信号分离是可行的.

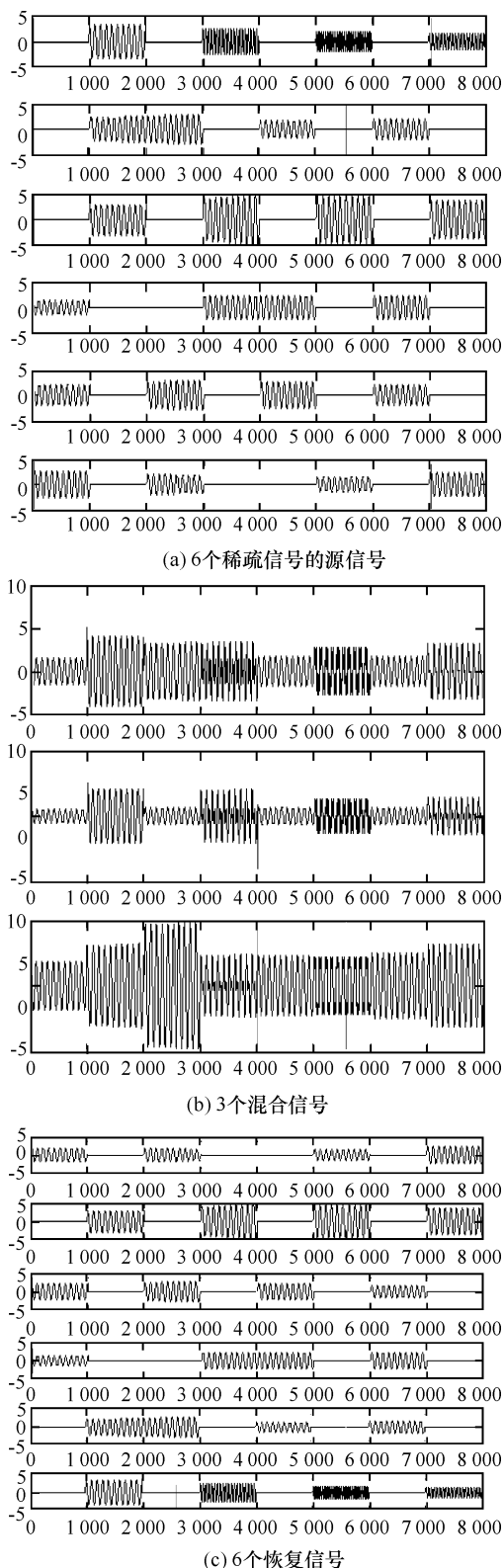


图2 6个稀疏源信号的恢复实例

Fig.2 Restore examples of six sparse source signals

3 总结

作为近几年来一个新兴的信号采样技术, 压缩感知理论突破传统信号采样速率高的要求, 推动了

信号处理的进一步发展. 本文对压缩感知理论作了系统的阐述,联系到它和盲信号分离的诸多相似性,根据信号的稀疏性质,把压缩感知理论运用到求解盲信号分离,不仅避免了用稀疏分析方法估计混叠矩阵的麻烦,而且降低了在信号处理方面的成本. 虽然压缩感知理论体系还不是很完善,很多问题待研究,如:信号的稀疏度量问题、不相关性等. 但对传统的信号处理是一个极好的补充和完善,在信号研究领域具有强大的生命力的理论,为目前许多难解的问题提供了新的思路和新的方法,开创了广阔的研究前景.

参考文献:

[1] Romberg J. Imaging via compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine,2008,25(2):14-20.
[2] Baraniuk R G. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine,2007,24(4):118-121.
[3] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.
[4] Candès E J,Tao T. Near optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies? [J]. IEEE

Trans. on Information Theory,2006,52(12):5406-5425.
[5] Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. Académie des sciences, 2006, 346(1): 598-592.
[6] Candès E, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling [J]. Inverse Problems, 2007, 23 (3): 969-985.
[7] 石光明,刘丹华,高大化,等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报,2009,37(5):1070-1081.
Shi Guang-ming,Liu Dan-hua,Gao Da-hua,et al. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. Acta Electronica Sinica,2009,37(5):1070-1081.
[8] Mallat S G,Zhifeng Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries [J]. IEEE Transaction on Signal Processing,1993, 41(12):3397-3415.
[9] Donoho D L, Elad M,Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise [J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, 52 (1):6-18.
[10] Trzasko J, Manduca. A highly undersampled magnetic resonance image reconstruction via homotopic ell-0 minimization [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2009,28(1):106-121.

· 简讯 ·

“2012 可拓软件研制工作研讨会”在广东工业大学召开

由中国人工智能学会可拓工程专业委员会和广东工业大学可拓学与创新方法研究所主办的“2012 可拓软件研制工作研讨会”于 2012 年 8 月 2 日~7 日在广东工业大学召开。参加会议的有广东工业大学、国防科技大学、浙江大学宁波理工学院、美国新墨西哥大学和深圳首道网络公司的教授、工程师、总经理和研究生。

会议由中国人工智能学会可拓工程专业委员会秘书长李兴森教授主持,蔡文研究员做了“可拓学概述”、“可拓创新方法”、“可拓学与人工智能”、“可拓数据挖掘”4 个专题的讲演。中国人工智能学会可拓工程专业委员会学术委员会主任陈文伟教授做了“可拓软件研制工作的现状与展望”的报告,总结了 2006 年以来可拓软件研制工作的情况、取得的成果和今后的研究方向。

会上,中美学者分别介绍了各自研制的代表性软件,如:广东工业大学李卫华教授演示了“自助游可拓策略生成系统”;广东工业大学李小妹博士演示了“促进产品销售的可拓数据挖掘软件”;浙江大学宁波理工学院李兴森教授介绍了“人机交互的可拓策略辅助生成系统”;深圳首道网络技术有限公司苏振庆总经理介绍了该公司研制的“可拓创新方法培训系统”;美国网络工程师 Mihai 先生介绍了他研制的“网络商务沟通与投标系统”,并对可拓学网站英文版提出了改进建议。

会议对可拓软件研制过程的技术问题进行了热烈的讨论,并就今后可拓软件研制工作的方向和研制过程以及合作开发提出了积极的建议。会议认为,利用计算机和网络进行矛盾问题智能化处理是科学技术今后的发展方向,可拓软件是实现这一理想的重要工具。目前这项工作已经迈出了重要的第一步,我们将继续努力,让可拓学为推动社会和经济的发展做出应有的贡献。

(可拓学与创新方法研究所供稿)